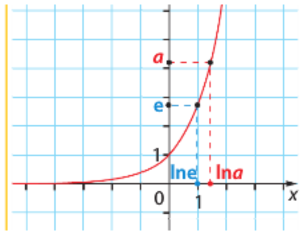
LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

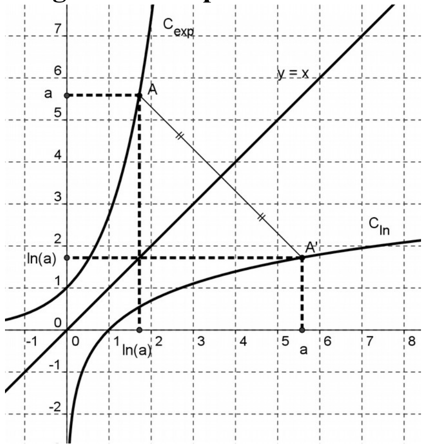
1. Définition et courbe de la fonction ln



a) Propriété et définition

Soit ***a* un réel strictement positif**.
On admet que l'équation $e^x = a$ a une unique solution que l'on note $\ln(a)$.

La fonction définie sur]0;+∞[qui à tout réel $x>0$ associe $\ln(x)$ est appelée **fonction logarithme népérien** et notée **ln**.



b) Propriétés immédiates

$e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$; $e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$

Pour tout réel $a>0$, $e^{\ln a} = a$

Pour tout réel b, $\ln(e^b) = b$

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives $(C_{\ln})$ et $(C_{\exp})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
Remarque : on dit que les deux fonctions, exp et ln, sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

2. Propriétés algébriques de la fonction ln

P1 : Soient a et b deux réels strictement positifs. On a :
$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

P2 : Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif. On a :
$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad ; \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a) \quad ; \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$$

Cas particuliers : $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$; $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$; $\ln(e^n) = n$

3. Propriétés fonctionnelles de la fonction ln

a) La fonction ln est dérivable sur]0;+∞[et pour tout $x>0$ $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

b) La fonction ln est strictement croissante sur]0;+∞[.

c) Tableau de variation complet de la fonction ln

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖	+		
ln	‖	0	1	↗

Pour tout $a>0$ et $b>0$ $a<b \Leftrightarrow \ln(a)<\ln(b)$

$a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$

d) Les primitives de la fonction inverse sur]0;+∞[sont les fonctions qui à x associent $\ln(x) + K$ où K est une constante.

Sur]0;+∞[: si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $F(x) = \ln(x) + K$