TS1 — 2018/2019

Introduction aux nombres complexes
Activité préparatoire — Enoncé A

TD 07 — partie 1

Enoncé A

Une solution réelle α de l'équation $x^3 + px + q = 0$ où p et q sont des réels est donnée par la formule de Cardan :

Lorsque le nombre $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est positif, cette solution α vaut $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$.

Le nombre $\sqrt[3]{a}$ est le nombre dont le cube vaut a.

a) Démontrer que l'équation (E_1) $x^3 + 6498\,x + 130321 = 0$ admet une unique solution réelle.

b) Appliquer la formule de Cardan pour résoudre (E_1).

c) Qui étaient messieurs Cardan, Bombelli ou encore Tartaglia ? Relever, entre autre, quelques dates clés.

TS1 — 2018/2019

Introduction aux nombres complexes
Activité préparatoire — Enoncé B

TD 07 — partie 1

Enoncé B

Une solution réelle α de l'équation $x^3 + px + q = 0$ où p et q sont des réels est donnée par la formule de Cardan :

Lorsque le nombre $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est positif, cette solution α vaut $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$.

Le nombre $\sqrt[3]{a}$ est le nombre dont le cube vaut a.

a) Justifier que l'équation (E) $x^3 - 15\,x - 4 = 0$ admet au moins une solution réelle.

b) Pourquoi la formule de Cardan ne peut pas être appliquée pour trouver cette solution ?

c) A l'aide de la calculatrice, trouver une racine entière β de $x^3 - 15\,x - 4$, démontrer que $x^3 - 15x - 4 = (x - \beta)(x^2 + 4x + 1)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) .

d) Qui étaient messieurs Cardan, Bombelli ou encore Tartaglia ? Relever, entre autre, quelques dates clés.

TS1 — 2018/2019

Introduction aux nombres complexes
Activité préparatoire — Enoncé C

TD 07 — partie 1

Enoncé C

1—Qui étaient messieurs Bombelli, Euler ou encore Gauss ? Relever, entre autre, quelques dates clés.

2—On note i un nombre imaginaire dont le carré vaut -1 ; autrement dit, avec on a : $\mathrm{i}^2 = -1$.

On admet que l'on travaille avec ce nombre selon les mêmes règles de calcul que celles utilisées sur l'ensemble des réels.

a) Que valent les nombres $(-\mathrm{i})^2$? i^3 ? $(-\mathrm{i})^3$? i^4 ? i^5 ? $(2\mathrm{i})^2$? $(11\mathrm{i})^2$? $(-3\mathrm{i})^2$

b) Calculer $(2+\mathrm{i})^2$, $(2-\mathrm{i})^2$, $(1+\mathrm{i})^2$, $(1-\mathrm{i})^2$

c) Développer et simplifier les nombres $(2+\mathrm{i})^3$ et $(2-\mathrm{i})^3$.

TS1 — 2018/2019

Introduction aux nombres complexes
Activité préparatoire — Enoncé D

TD 07 — partie 1

Enoncé D

1—Qui étaient messieurs Bombelli, Euler ou encore Gauss ? Relever, entre autre, quelques dates clés.

2—On note i un nombre imaginaire dont le carré vaut -1 ; autrement dit, avec on a : $\mathrm{i}^2 = -1$.

On admet que l'on travaille avec ce nombre selon les mêmes règles de calcul que celles utilisées sur l'ensemble des réels.

Calculer les nombres $(-\mathrm{i})^2$, $(2\mathrm{i})^2$, $(-2\mathrm{i})^2$, $(1+\mathrm{i})^2$ et $(1-\mathrm{i})^2$

3—Soit x un réel.

a) Ecrire $x^4 + 4$ comme une différence de deux carrés.

b) Ecrire $x^2 - 2\mathrm{i}$ comme une différence de deux carrés.

c) Développer et simplifier l'expression $(x - (1+\mathrm{i}))(x - (1-\mathrm{i}))$.

Introduction aux nombres complexes

Activité de synthèse par groupe d'apprentissage

(un groupe d'apprentissage est formé des quatre experts A, B, C et D)

PRENOMS NOMS :
Chacun complète la feuille, j'en récupère une par groupe

1—Sur une frise chronologique placer quelques dates clés concernant les apports de Cardan, Bombelli, Tartaglia, Euler et Gauss dans le domaine des nombres complexes.

2—a) Démontrer que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle.

3—a) Rappeler la formule de Cardan permettant de trouver une solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$ où p et q sont des réels.

b) Pourquoi ne peut-on pas appliquer, a priori, la formule de Cardan pour résoudre l'équation (E) $x^3 - 15x - 4 = 0$?

4—Bombelli a appliqué la formule de Cardan pour trouver une solution de l'équation (E) ci-dessus en imaginant un nombre, noté i, dont le carré vaut -1.

Le nombre $-\frac{q}{2}+\sqrt{D}$ apparaissant dans la formule de Cardan sera noté $-\frac{q}{2}+d$ où d est un nombre dont le carré vaut D.

Dans la suite, les calculs sont à justifier.

a) Quel nombre peut-on proposer comme nombre dont le carré vaut D ?

b) Quels nombres peut-on proposer comme nombres dont le cube valent respectivement $-\frac{q}{2}+d$ et $-\frac{q}{2}-d$?

c) A quelle solution de l'équation (E) conduit l'utilisation de la formule de Cardan par Bombelli pour résoudre l'équation (E) ? Commenter rapidement.

5—Factoriser autant que possible sur $\mathbb{R}$ l'expression x^4+4

On doit obtenir un produit de polynômes à coefficient réels.