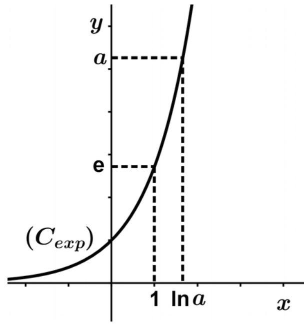
Phase 1 – document A

LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Définition et courbe de la fonction ln



a) Propriété et définition

Soit ***a*** **un réel strictement positif**.
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
De plus $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Pour tout a de l'intervalle $\left] \lim_{x \to -\infty} e^x ; \lim_{x \to +\infty} e^x \right[$ c'est à dire pour tout $a \in]0;+\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée $\ln(a)$.

La fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel $x>0$ associe $\ln(x)$ est appelée **fonction logarithme népérien** et notée **ln**.

b) Propriétés immédiates

$1 \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 0$ ln(1)=0 ; $e \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 1$ ln(e)=1

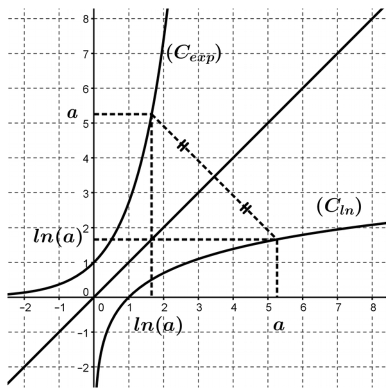
$a>0$ $a \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} b$ Pour tout réel $a>0$ et tout réel b, $e^b = a \iff b = \ln(a)$

$x>0$ $x \xrightarrow{\ln} \ln(x) \xrightarrow{\exp} \exp(\ln(x))=x$ Pour tout réel $x>0$, $e^{\ln x} = x$

x réel $x \xrightarrow{\exp} \exp(x) \xrightarrow{\ln} \ln(\exp(x))=x$ Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives $(C_{\ln})$ et $(C_{\exp})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

Remarque : on dit que les deux fonctions, exp et ln, sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.



Propriétés algébriques de la fonction ln

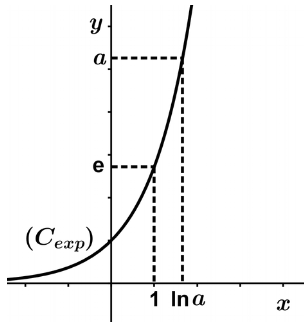
P1 : Soient a et b deux réels strictement positifs. On a :
$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

P2 : Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif. On a :
$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad ; \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a) \quad ; \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$$

Cas particuliers : $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$; $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$; $\ln(e^n) = n$

Consigne : sans papier crayon, comprendre ce document en échangeant entre vous préciser comment on peut contrôler toutes les propriétés de la fonction ln à la calculatrice

LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN



Définition et courbe de la fonction ln

a) Propriété et définition

Soit ***a* un réel strictement positif**.
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur ℝ
De plus $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

Pour tout a de l'intervalle $]\lim_{x\to-\infty} e^x ; \lim_{x\to+\infty} e^x[$ c'est à dire pour tout $a \in]0;+\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x=a$ admet une unique solution sur ℝ notée $\ln(a)$.

La fonction définie sur]0;+∞[qui à tout réel x>0 associe $\ln(x)$ est appelée **fonction logarithme népérien** et notée **ln**.

b) Propriétés immédiates

$1 \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 0$ ln(1)=0 ; $e \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 1$ ln(e)=1

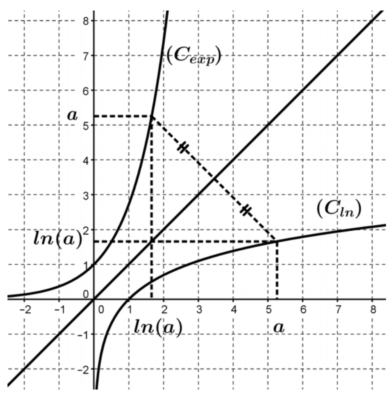
a>0 $a \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} b$ Pour tout réel a>0 et tout réel b, $e^b=a \Leftrightarrow b=\ln(a)$

x>0 $x \xrightarrow{\ln} \ln(x) \xrightarrow{\exp} \exp(\ln(x))=x$ Pour tout réel x>0, $e^{\ln x}=x$

x réel $x \xrightarrow{\exp} \exp(x) \xrightarrow{\ln} \ln(\exp(x))=x$ Pour tout réel x, $\ln(e^x)=x$

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives $(C_{\ln})$ et $(C_{\exp})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$

Remarque : on dit que les deux fonctions, exp et ln, sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.



Propriétés fonctionnelles de la fonction ln

a) La fonction ln est dérivable en 1 et ln'(1)=1

b) $\lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h}=1$

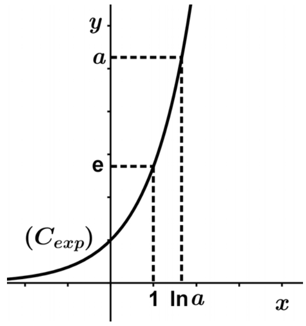
c) La fonction ln est dérivable sur]0;+∞[et pour tout x>0 $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

Consigne : sans papier crayon, comprendre ce document en échangeant entre vous
préciser comment on peut contrôler toutes les propriétés de la fonction ln à la calculatrice

Phase 1 – document C

LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Définition et courbe de la fonction ln



a) Propriété et définition

Soit ***a*** **un réel strictement positif**.
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Pour tout a de l'intervalle $\left] \lim\limits_{x \to -\infty} e^x ; \lim\limits_{x \to +\infty} e^x \right[$ c'est à dire pour tout $a \in \left]0;+\infty\right[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée $\ln(a)$.

La fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel $x>0$ associe $\ln(x)$ est appelée **fonction logarithme népérien** et notée **ln**.

b) Propriétés immédiates

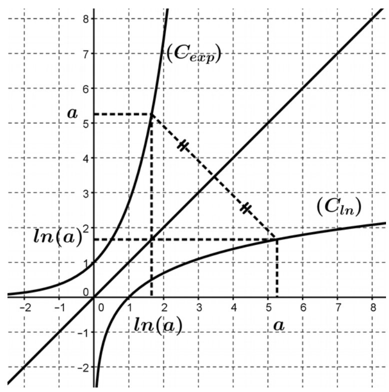
$1 \underset{\text{exp}}{\overset{\text{ln}}{\rightleftarrows}} 0$ ln(1)=0 ; $e \underset{\text{exp}}{\overset{\text{ln}}{\rightleftarrows}} 1$ ln(e)=1

$a>0$ $a \underset{\text{exp}}{\overset{\text{ln}}{\rightleftarrows}} b$ Pour tout réel $a>0$ et tout réel b, $e^b = a \iff b = \ln(a)$

$x>0$ $x \xmapsto{\text{ln}} \ln(x) \xmapsto{\text{exp}}$ exp(ln(x))=x Pour tout réel $x>0$, $e^{\ln x} = x$

x réel $x \xmapsto{\text{exp}} \exp(x) \xmapsto{\text{ln}}$ ln(exp(x))=x Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives $(C_{\ln})$ et $(C_{\exp})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



Remarque : on dit que les deux fonctions, exp et ln, sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

Propriétés fonctionnelles de la fonction ln

a) La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$ $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

b) La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

c) Tableau de variation de la fonction ln

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖	+		
ln	‖	0 ↗	1 ↗	

Propriétés :

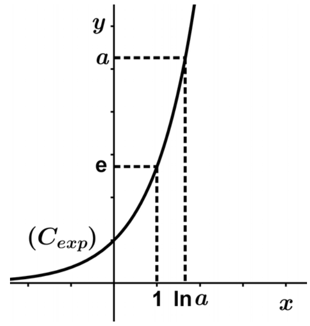
Pour tout $a>0$ et $b>0$ $a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$

$a = b \iff \ln(a) = \ln(b)$

Consigne : sans papier crayon, comprendre ce document en échangeant entre vous
préciser comment on peut contrôler toutes les propriétés de la fonction ln à la calculatrice

Phase 1 – document D

LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN



Définition et courbe de la fonction ln

a) Propriété et définition

Soit ***a* un réel strictement positif**.
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur ℝ
De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Pour tout *a* de l'intervalle $]\lim\limits_{x \to -\infty} e^x ; \lim\limits_{x \to +\infty} e^x[$ c'est à dire pour tout $a \in\ ]0;+\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution sur ℝ notée $\ln(a)$.

La fonction définie sur]0;+∞[qui à tout réel *x*>0 associe $\ln(x)$ est appelée **fonction logarithme népérien** et notée **ln**.

b) Propriétés immédiates

$1 \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 0$ ln(1)=0 ; $e \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 1$ ln(e)=1

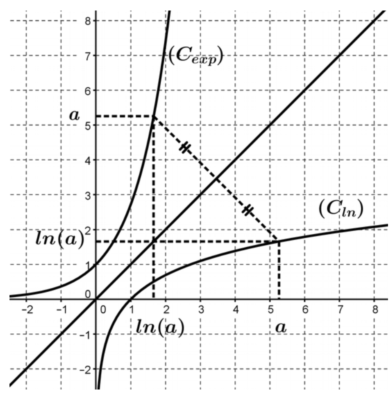
a>0 $a \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} b$ Pour tout réel *a*>0 et tout réel *b*, $e^b = a \Leftrightarrow b = \ln(a)$

x>0 $x \xmapsto{\ln} \ln(x) \xmapsto{\exp} \exp(\ln(x)) = x$ Pour tout réel *x*>0, $e^{\ln x} = x$

x réel $x \xmapsto{\exp} \exp(x) \xmapsto{\ln} \ln(\exp(x)) = x$ Pour tout réel *x*, $\ln(e^x) = x$

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives $(C_{\ln})$ et $(C_{\exp})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

Remarque : on dit que les deux fonctions, exp et ln, sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.



La fonction composée ln o u

$$x \xmapsto{u} u(x) \xmapsto{\ln} \ln(u(x))$$

$$x \xmapsto{\ln \circ u} \ln(u(x))$$

La fonction ln o *u* (notée aussi ln *u*) est définie pour tout *x* tel que $u(x) > 0$

Propriété admise

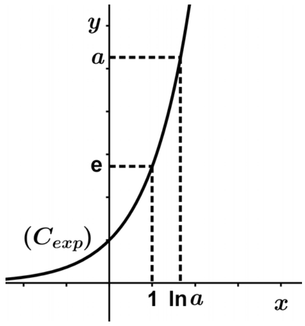
Soit *u* une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.
La fonction ln o *u* est dérivable sur I et $(\ln\ u)' = \dfrac{u'}{u}$

Consigne : sans papier crayon, comprendre ce document en échangeant entre vous préciser comment on peut contrôler toutes les propriétés de la fonction ln à la calculatrice

Phase 1 – document E

LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Définition et courbe de la fonction ln



a) Propriété et définition

Soit ***a*** **un réel strictement positif**.
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur ℝ
De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

Pour tout *a* de l'intervalle $]\lim\limits_{x\to-\infty} e^x ; \lim\limits_{x\to+\infty} e^x[$ c'est à dire pour tout $a \in\ ]0;+\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x=a$ admet une unique solution sur ℝ notée $\ln(a)$.

La fonction définie sur]0;+∞[qui à tout réel *x*>0 associe $\ln(x)$ est appelée **fonction logarithme népérien** et notée **ln**.

b) Propriétés immédiates

$1 \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 0$ ln(1)=0 ; $e \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 1$ ln(e)=1

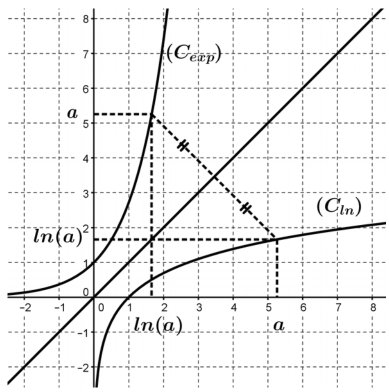
a>0 $a \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} b$ Pour tout réel *a*>0 et tout réel *b*, $e^b=a \iff b=\ln(a)$

x>0 $x \xrightarrow{\ln} \ln(x) \xrightarrow{\exp} \exp(\ln(x))=x$ Pour tout réel *x*>0, $e^{\ln x}=x$

x réel $x \xrightarrow{\exp} \exp(x) \xrightarrow{\ln} \ln(\exp(x))=x$ Pour tout réel *x*, $\ln(e^x)=x$

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives $(C_{\ln})$ et $(C_{\exp})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$

Remarque : on dit que les deux fonctions, exp et ln, sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.



Fonction ln et limites

Propriétés

P1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)=-\infty$

P2 : Croissance comparée

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$

Consigne : sans papier crayon, comprendre ce document en échangeant entre vous préciser comment on peut contrôler toutes les propriétés de la fonction ln à la calculatrice