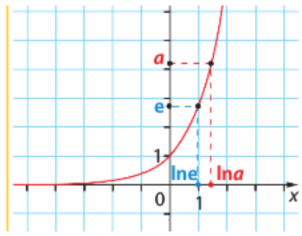
LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1. Définition et courbe de la fonction ln



a) Propriété et définition

Soit ***a* un réel strictement positif**.
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur ℝ
De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

Pour tout a de l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} e^x ; \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\right[$ c'est à dire pour tout $a\in\,]0;+\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x=a$ admet une unique solution sur ℝ notée $\ln(a)$.

La fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel $x>0$ associe $\ln(x)$ est appelée **fonction logarithme népérien** et notée **ln**.

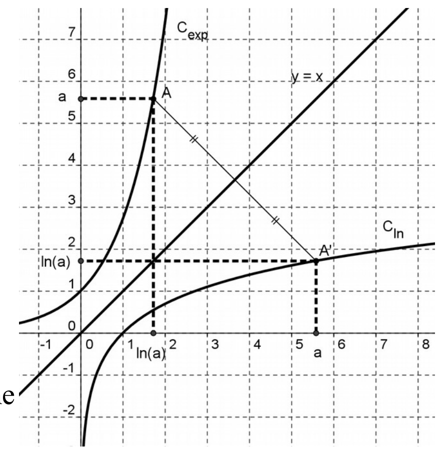
b) Propriétés immédiates

$1 \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 0$ $\ln(1)=0$; $e \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 1$ $\ln(e)=1$

$a>0$ $a \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} b$ Pour tout réel $a>0$ et tout réel b, $e^b=a \Leftrightarrow b=\ln(a)$

Pour tout réel $x>0$, $e^{\ln x}=x$

Pour tout réel x, $\ln(e^x)=x$



Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives $(C_{\ln})$ et $(C_{\exp})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$

Remarque : on dit que les deux fonctions, exp et ln, sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

2. Propriétés algébriques de la fonction ln

P1 : Soient a et b deux réels strictement positifs. On a :
$$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$$

P2 : Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif. On a :
$$\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b) \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b) \quad ; \quad \ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a) \quad ; \quad \ln(a^n)=n\ln(a)$$

Cas particuliers : $\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-1$; $\ln(\sqrt{e})=\frac{1}{2}$; $\ln(e^n)=n$

3. Propriétés fonctionnelles de la fonction ln

a) La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0} \ln(x)=-\infty$.

c) La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$ $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

d) $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

e) Tableau de variation complet de la fonction ln

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	||		$+$	
$\ln$	|| $-\infty$	0	1	$+\infty$

Pour tout $a > 0$ et $b > 0$ $\quad a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$

$a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$

4. La fonction composée ln o u

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rr, bend right, "\ln \circ u"'] & u(x) \arrow[r, mapsto, "\ln"] & \ln(u(x)) \end{tikzcd}$$

La fonction ln o *u* (notée aussi ln *u*) est définie pour tout *x* tel que $u(x) > 0$

Propriété admise

Soit *u* une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

La fonction ln o *u* est dérivable sur I et $(\ln\ u)' = \frac{u'}{u}$

5. Croissance comparée

Propriétés

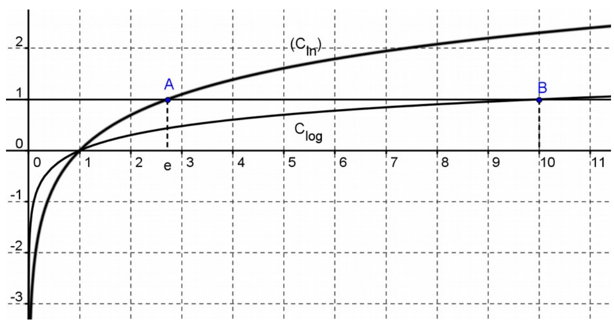
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et plus généralement $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$ et plus généralement $\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

6. La fonction logarithme décimal : log

Définition

On définit sur]0;+∞[la fonction logarithme décimal, notée log, par $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$



Propriétés

P1 : La fonction log a les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln.

P2 : La fonction log est strictement croissante sur]0;+∞[.

P3 : Pour tout $n \in \mathbb{Z} \quad \log(10^n) = n$